**หน่วยที่ 9**

**พื้นฐานเรขาคณิตวิเคราะห์**

**อาจารย์ ดร.**.............................

**ชื่อ** อาจารย์ ดร.........................................................

**วุฒิ** วท.ม. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

**ตำแหน่ง** อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

**หน่วยที่เขียน** หน่วยที่ 9

**หน่วยที่ 9**

**พื้นฐานเรขาคณิตวิเคราะห์**

**เค้าโครงเนื้อหา**

ตอนที่ 9.1 ระบบแกนพิกัดฉาก

9.1.1 ระนาบพิกัดฉาก

9.1.2 โพรเจกชัน

9.1.3 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

9.1.4 จุดแบ่งส่วนของเส้นตรง

ตอนที่ 9.2 เส้นตรง

9.2.1 ความชันของเส้นตรง

9.2.2 สมการเส้นตรง

9.2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงสองเส้น

9.2.4 ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรงและระหว่างเส้นคู่ขนาน

ตอนที่ 9.3 ภาคตัดกรวย

9.3.1 แนวคิดเกี่ยวกับวงกลม

9.3.2 แนวคิดเกี่ยวกับพาราโบลา

9.3.3 แนวคิดเกี่ยวกับวงรี

9.3.4 แนวคิดเกี่ยวกับไฮเพอร์โบลา

**แนวคิด**

1. เรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นวิชาที่นำหลักเกณฑ์ต่างๆ ทางพีชคณิตและเรขาคณิตมาผสม  
   ผสานกัน เพื่อแก้ปัญหาทางเรขาคณิตด้วยพีชคณิต
2. ระนาบพิกัดฉาก เป็นระนาบที่เกิดจากเส้นจำนวนจริงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉาก โดยที่เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอน และอีกเส้นหนึ่งอยู่ในแนวดิ่ง
3. สมการเส้นตรง คือ ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y โดยเลขชี้กำลังของตัวแปรแต่ละตัวเป็น 1 ซึ่งตัวแปรไม่อยู่ในรูปการคูณกัน
4. เส้นตรงสองเส้นใดๆ ต้องตัดกันหรือขนานกันอย่างใดอย่างหนึ่ง
5. ภาคตัดกรวย หมายถึง [เส้นโค้ง](http://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B9%80%E0%B8%AA%E0%B9%89%E0%B8%99%E0%B9%82%E0%B8%84%E0%B9%89%E0%B8%87)ที่ได้จากการตัด[พื้นผิวกรวย](http://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B8%81%E0%B8%A3%E0%B8%A7%E0%B8%A2)กลมด้วย[ระนาบ](http://th.wikipedia.org/wiki/%E0%B8%A3%E0%B8%B0%E0%B8%99%E0%B8%B2%E0%B8%9A)แบน ทำให้เกิดเป็นรูป วงกลม วงรี พาราโบลา หรือ ไฮเพอร์โบลา

**วัตถุประสงค์**

เมื่อศึกษาหน่วยที่ 9 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. อธิบายความหมายของระบบแกนพิกัดฉากและหาตำแหน่งของจุดบนระนาบพิกัดฉาก

2. อธิบายความหมายของความชันของเส้นตรง

3. บอกความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงสองเส้นใดๆ

4. หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดใดๆ จุดกับเส้นตรง และเส้นคู่ขนาน

5. หาสมการเส้นตรง วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ให้

6. เขียนกราฟวงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดสมการของภาคตัด-กรวยให้

**ตอนที่ 9.1**

**ระบบแกนพิกัดฉาก**

โปรดอ่านแผนการสอนประจำตอนที่ 9.1 แล้วจึงศึกษาเนื้อหาสาระ พร้อมปฏิบัติกิจกรรมในแต่ละเรื่อง

**หัวเรื่อง**

เรื่องที่ 9.1.1 ระนาบพิกัดฉาก  
เรื่องที่ 9.1.2 โพรเจกชัน  
เรื่องที่ 9.1.3 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด  
เรื่องที่ 9.1.4 จุดแบ่งส่วนของเส้นตรง

**แนวคิด**

1. ระนาบพิกัดฉาก เป็นระนาบที่เกิดจากเส้นจำนวนจริงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉาก โดยที่  
เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอน และอีกเส้นหนึ่งอยู่ในแนวดิ่ง

2. โพรเจกชันของจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรง คือ จุดที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรงที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ไปตั้งฉากกับเส้นตรง

3. ระยะทางระหว่างจุดสองจุด คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดที่กำหนด  
ให้

4. จุดแบ่งส่วนของเส้นตรง คือ จุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรงซึ่งแบ่งความยาวของส่วนของเส้นตรงเป็นสองส่วน

**วัตถุประสงค์**

เมื่อศึกษาตอนที่ 9.1 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. หาพิกัดของจุดบนระนาบพิกัดฉาก

2. หาโพรเจกชันของจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรง

3. หาระยะทางระหว่างจุดสองจุด

4. หาจุดแบ่งส่วนของเส้นตรงตามอัตราส่วนที่กำหนดให้

**เรื่องที่ 9.1.1 ระนาบพิกัดฉาก**

ระนาบพิกัดฉาก (rectangular coordinate plane) คือ ระนาบที่เกิดจากเส้นจำนวนจริงสองเส้นตัดกันเป็นมุมฉาก โดยที่เส้นหนึ่งอยู่ในแนวนอน เรียกว่า แกน X (x-axis) และอีกเส้นหนึ่งอยู่ในแนวตั้ง เรียกว่า แกน Y (y-axis) จุดที่เส้นตรงทั้งสองตัดกัน เรียกว่า จุดกำเนิด (origin) ซึ่งเป็นจุดที่แทน 0 บนเส้นจำนวนจริงทั้งสอง โดยหน่วยความยาวบนแกน X ซึ่งอยู่ทางขวาของแกน Y เป็นจำนวนจริงบวก และทางซ้ายของแกน Y เป็นจำนวนจริงลบ และหน่วยความยาวบนแกน Y ซึ่งอยู่เหนือแกน X เป็นจำนวนจริงบวก และอยู่ใต้แกน X เป็นจำนวนจริงลบ และเรียกแกนทั้งสองนี้ว่า แกนพิกัดฉาก (coordinate axis) ดังภาพที่ 9.1

Y

4

3

2

1

-1

-2

-3

-4

0

X

-4 -3 -2 -1 1 2 3 4

**ภาพที่ 9.1 ระนาบพิกัดฉาก**

แกน X และแกน Y นี้จะแบ่งระนาบพิกัดฉากออกเป็น 4 ส่วน ซึ่งในแต่ละส่วนนี้ เรียกว่า จตุภาค (quadrant) ดังภาพที่ 9.2 โดยที่

จตุภาคที่ 1 คือ ส่วนที่อยู่ทางขวาของแกน Y และเหนือแกน X

จตุภาคที่ 2 คือ ส่วนที่อยู่ทางซ้ายของแกน Y และเหนือแกน X

จตุภาคที่ 3 คือ ส่วนที่อยู่ทางซ้ายของแกน Y และใต้แกน X

จตุภาคที่ 4 คือ ส่วนที่อยู่ทางขวาของแกน Y และใต้แกน X

**ข้อสังเกต** จุดที่อยู่บนแกน X หรือแกน Y จะไม่เป็นจุดที่อยู่ในจตุภาคใดๆ ทั้งสิ้น

**หลังจากศึกษาเนื้อหาสาระเรื่องที่ 9.1.1 แล้ว โปรดปฏิบัติกิจกรรม 9.1.1**

**ในแนวการศึกษาหน่วยที่ 9 ตอนที่ 9.1 เรื่องที่ 9.1.1**

**เรื่องที่ 9.1.2 โพรเจกชัน**

โพรเจกชันของจุดใดจุดหนึ่งบนเส้นตรง คือ จุดที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรงที่ลากจากจุดที่กำหนดให้ไปตั้งฉากกับเส้นตรง กล่าวคือ ให้ P เป็นจุดใดๆ บนระนาบ และ L เป็นเส้นตรง โพรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง L คือจุด  เป็นจุดตัดกันของเส้นตรงที่ลากจากจุด P มาตั้งฉากกับเส้นตรง L ถ้าจุด P อยู่บนเส้นตรง L โพรเจกชันของจุด P คือจุด P ดังภาพที่ 9.4



∙

P

L

∙

L

P

(ก) จุด  เป็นโพรเจกชันของจุด P (ข) จุด P เป็นโพรเจกชันของจุด P

**ภาพที่ 9.4 โพรเจกชันของจุด P บนเส้นตรง L**

**หลังจากศึกษาเนื้อหาสาระเรื่องที่ 9.1.2 แล้ว โปรดปฏิบัติกิจกรรม 9.1.2**

**ในแนวการศึกษาหน่วยที่ 9 ตอนที่ 9.1 เรื่องที่ 9.1.2**

**ตอนที่ 9.2**

**เส้นตรง**

โปรดอ่านแผนการสอนประจำตอนที่ 9.2 แล้วจึงศึกษาเนื้อหาสาระ พร้อมปฏิบัติกิจกรรมในแต่ละเรื่อง

**หัวเรื่อง**

เรื่องที่ 9.2.1 ความชันของเส้นตรง  
เรื่องที่ 9.2.2 สมการเส้นตรง  
เรื่องที่ 9.2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นตรงสองเส้น  
เรื่องที่ 9.2.4 ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรงและระหว่างเส้นคู่ขนาน

**แนวคิด**

1. ความชันของเส้นตรง คือ ค่าแทนเจนต์ของมุมที่เส้นตรงนั้นทำมุมกับแกน X

2. สมการเส้นตรงอยู่ในรูปสมการเชิงเส้นซึ่งเลขชี้กำลังของตัวแปรเท่ากับหนึ่ง

3. เส้นตรงสองเส้นจะต้องตัดกันหรือขนานกันอย่างใดอย่างหนึ่ง

4. ความรู้เรื่องความชันของเส้นตรงและสมการเส้นตรงนำไปสู่สูตรระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนาน

**วัตถุประสงค์**

เมื่อศึกษาตอนที่ 9.2 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. อธิบายความหมายของความชันของเส้นตรง

2. หาความชันของเส้นตรง เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้

3. หาสมการเส้นตรงและเขียนกราฟเส้นตรงนั้น เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้

4. บอกความสัมพันธ์ของเส้นตรงสองเส้น

5. หาระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง และระหว่างเส้นคู่ขนาน

**เรื่องที่ 9.2.1 ความชันของเส้นตรง**

ให้ P(x1, y1) เป็นจุดบนระนาบ จะสามารถลากเส้นตรงผ่านจุด P ได้หลายเส้น แต่ถ้าให้   
Q(x2, y2) เป็นจุดอีกจุดบนระนาบ จะสามารถลากเส้นตรงผ่านจุด P และ Q ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น   
ดังภาพที่ 9.11

X

∙

Y

P(x1, y1)

Q(x2, y2)

∙

O

**ภาพที่ 9.11 เส้นตรงผ่านจุด P**

การบอกลักษณะของเส้นตรง อาจบอกในลักษณะความเอียงของเส้นตรงหรือความชันของเส้นตรงให้ L เป็นเส้นตรงซึ่งตัดกับแกน X และทำมุมกับแกน X เป็นมุม  (การวัดมุมให้วัดจากแกน X ไปยังเส้นตรงในทิศทวนเข็มนาฬิกา) ดังภาพที่ 9.12

**หลังจากศึกษาเนื้อหาสาระเรื่องที่ 9.2.1 แล้ว โปรดปฏิบัติกิจกรรม 9.2.1**

**ในแนวการศึกษาหน่วยที่ 9 ตอนที่ 9.2 เรื่องที่ 9.2.1**

**เรื่องที่ 9.2.2 สมการเส้นตรง**

สมการเส้นตรง เป็นความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x กับตัวแปร y ซึ่งเลขชี้กำลังของตัวแปรทั้งสองมีค่าเท่ากับ 1 และไม่อยู่ในรูปผลคูณ กล่าวคือ สมการเส้นตรงเขียนได้ในรูป

Ax + By + C = 0

เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงที่ใดๆ ซึ่ง A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

**หลังจากศึกษาเนื้อหาสาระเรื่องที่ 9.2.2 แล้ว โปรดปฏิบัติกิจกรรม 9.2.2**

**ในแนวการศึกษาหน่วยที่ 9 ตอนที่ 9.2 เรื่องที่ 9.2.2**

**บรรณานุกรม**

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2544). *หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 011 ระดับชั้นมัธยม  
ศึกษาตอนปลาย หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524.* (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

(2544). *หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค 012 ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย หลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย พุทธศักราช 2524.* (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2533). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

H. Anton. (1995). *Calculus with analytic geometry*. 5th edition. USA: John Wiley & Son, Inc.

*Calculus Brief Edition*. USA: John Wiley & Son, Inc.